

4.5 Problemas de Aplicación de Máximos y Mínimos

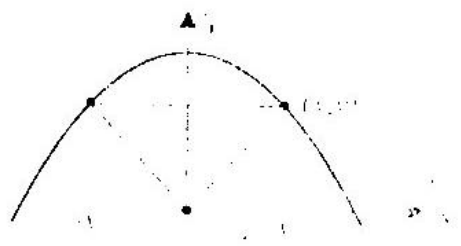
Pasos para abordar problemas de optimización (maximizar o minimizar):

1. Analizar el problema y ver cuál es el objetivo: minimizar o maximizar.
2. Dibujar diagramas si fuera posible.
3. Determinar las variables que intervienen en el problema.
4. Determinar la función objetivo f la cual debe estar en función de una variable.
5. Definir el dominio de la función f
6. Si $D_f = [a, b]$ y f es continua en $[a, b]$ entonces aplicar la teoría de valores extremos en intervalos cerrados, caso contrario, emplear el criterio de la primera o segunda derivada.

Ejercicios Resueltos

- 4.5.1 Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen, la base paralela al eje X, los extremos de ésta en la curva $12y = 36 - x^2$, $y \geq 0$, hállese el área correspondiente del triángulo máximo.

Solución.



$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura}) = x \cdot y$$

$$\text{Pero } 12y = 36 - x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{12}(36 - x^2) \geq 0$$

$$36 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6 \wedge x \geq 0$$

luego: $A(x) = \frac{1}{12}x(36 - x^2)$, $x \in [0, 6]$

Determinando los puntos críticos, tenemos

$$A'(x) = \frac{1}{12}(36 - x^2 - 2x^2) = -\frac{1}{4}(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ (p.c.)}$$

Evaluando la función A en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición:

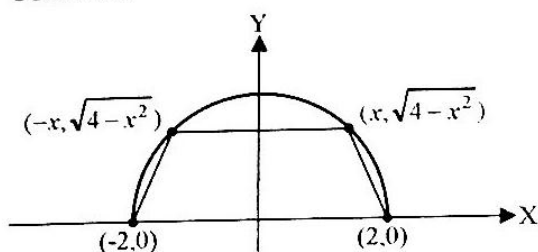
$$A(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}, \quad A(0) = A(6) = 0$$

Por tanto, el área máxima del triángulo es $4\sqrt{3}$, y se obtiene cuando $x = 2\sqrt{3}$ unidades.

- 4.5.2 Dos vértices de un trapecio están en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, los otros dos están sobre la semi-

circunferencia superior $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$). ¿Cuál es la máxima área posible del trapecio?

Solución.



$$A = \left(\frac{B+b}{2} \right) h$$

$$B = 4, \quad b = 2x, \quad h = y = \sqrt{4-x^2}$$

$$\text{luego: } A(x) = \left(\frac{4+2x}{2} \right) \sqrt{4-x^2}$$

es decir: $A(x) = (2+x)\sqrt{4-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

Derivando e igualando a cero, tenemos

$$A'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x(2+x)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \frac{-2(x-1)\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}}$$

Luego, $A'(x) = 0$ implica que $x = 1$, además la derivada no existe en $x = 2$. Evaluando

$$A(1) = 3\sqrt{3} \quad A(0) = 4 \quad A(2) = 0$$

Por tanto, el área máxima del trapecio es $3\sqrt{3}$, y es alcanzada cuando la base menor mide 2 unidades.

4.5.3 Un rectángulo está acotado por los ejes coordenados, y por la gráfica de la recta L que pasa por $(0,4)$ y $(6,0)$. ¿Qué largo y que ancho ha de tener el rectángulo para que su área sea máxima?

Solución.

El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y \quad \dots\dots\dots(\alpha)$$

donde x representa el largo y y el ancho. La ecuación de la recta L está dada por

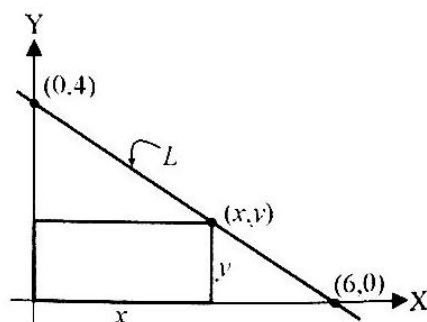
$$y - 4 = \frac{0-4}{6-0}(x-0) \Rightarrow L: y = -\frac{2}{3}x + 4$$

En (α) , se tiene:

$$A(x) = x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 4 \right) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x, \quad 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow A'(x) = -\frac{4}{3}x + 4 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ (p.c.)}$$

Luego, $A(0) = 0$, $A(6) = 0$, $A(3) = 6$

Concluimos que el área máxima del rectángulo es 6 unidades y se obtiene cuando el largo $x = 3$ unid. y el ancho es $y = -\frac{2}{3}(3) + 4 = 2$ unid.



4.5.4 Determine las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de radio R y altura H .

Solución.

Radio del cono: R

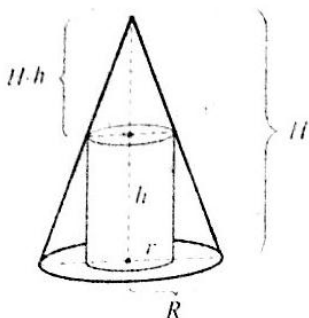
Altura del cono: H

Radio del cilindro: r

Altura del cilindro: h

Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h \quad \dots\dots\dots(\alpha)$$



Por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow h = H - \frac{H}{R}r \quad \dots\dots(\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) tenemos

$$V(r) = \pi r^2 \left(H - \frac{H}{R}r \right) = \pi r^2 H - \frac{\pi H}{R}r^3, \quad r \in [0, R]$$

Obtenemos los puntos críticos:

$$V'(r) = \frac{\pi H}{R}(2Rr - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r = \frac{2}{3}R$$

Luego, $V(0) = V(R) = 0$, y $V(\frac{2}{3}R) = \frac{4}{27}\pi HR^2$, es decir, el cilindro de máximo volumen que se

puede inscribir en el cono descrito tiene radio $r = \frac{2}{3}R$ y altura $h = H - \frac{H}{R}\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{1}{3}H$.

4.5.5 Un pedazo rectangular de cartón mide 10 pies de ancho por 16 pies de largo, se cortarán cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza de cartón resultante y así formar una caja sin tapa. ¿Qué dimensiones tendrá la caja de volumen máximo?

Solución.

Se quiere maximizar el volumen de la caja: $V = (\text{área de la base})(\text{altura})$.

$$\begin{aligned} V(x) &= [(16-2x)(10-2x)]x = 4(8-x)(5-x)x \\ &= 4(40x - 13x^2 + x^3), \quad x \in [0, 5] \end{aligned}$$

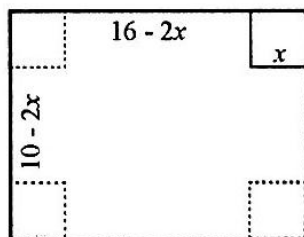
Derivando e igualando a cero obtenemos

$$V'(x) = 4(40 - 26x + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow (3x-20)(x-2) = 0$$

De donde $x=2$ es el único punto crítico, ya que $x = \frac{20}{3}$ no pertenece al dominio $[0, 5]$. Luego

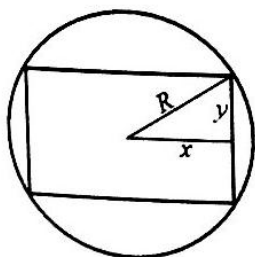
$$V(0) = V(5) = 0, \quad V(2) = 144 \text{ pies}^3 \quad (\text{volumen máximo}).$$

Entonces, $x=2$ hace máximo el volumen de la caja, y las dimensiones de la caja son
largo: $16-2x=12$ pies, ancho: $10-2x=6$ pies, altura: $x=2$ pies



4.5.6 Calcule las dimensiones del rectángulo que tiene área máxima, de modo que se pueda inscribir en una circunferencia de radio R .

Solución.



Debido a que la base del rectángulo es $2x$ y la altura $2y$, entonces su área es: $A = (2x)(2y) = 4xy \quad \dots\dots\dots(a)$

Por Pitágoras, $R^2 = x^2 + y^2$, de donde $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, reemplazando en (a) obtenemos

$$A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [0, R]$$

Derivando:

$$A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4x(2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 4(R^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$A'(x) \text{ no existe} \Rightarrow R^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm R$$

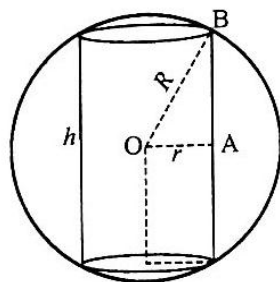
entonces, los puntos críticos son $x = \frac{\sqrt{2}}{2} R$ y $x = R$, los que se encuentran dentro del dominio de la función A ; luego

$$A(0) = 0, \quad A(R) = 0, \quad A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} R\right) = 2R^2 \quad (\text{área máxima})$$

entonces, el cuadrilátero de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia tiene dimensiones: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} R$ i $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$, es decir, es un cuadrado.

4.5.7 Un cilindro circular recto se inscribe en una esfera de radio R . Determine las dimensiones del cilindro de volumen máximo. Además, muestre que la razón entre la altura del cilindro y su radio es $\sqrt{2}$, y que la razón entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro máximo es $\sqrt{3}$.

Solución.



Dimensiones del cilindro: r, h

Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h \quad \dots\dots\dots(a)$$

En $\triangle AOB$, por Pitágoras tenemos:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(b)$$

Reemplazando (b) en (a):

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right), \quad h \in [0, 2R]$$

¿Por qué $h \in [0, 2R]$?

Como $r \geq 0 \Rightarrow R^2 - \frac{h^2}{4} \geq 0 \Rightarrow -2R \leq h \leq 2R$, además $h \geq 0$, luego $h \in [0, 2R]$.

Calculando los puntos críticos de V :

$$V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right) = 0 \Rightarrow -3h^2 = -4R^2 \Rightarrow h = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} R \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

luego

$$V(0) = 0, \quad V(2R) = 0, \quad V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R\right) = \pi \left[R^2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} R \right)^3 \right] = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi R^3 \quad (\text{volumen máximo})$$

Entonces, el volumen máximo del cilindro se obtiene cuando $h = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$. El valor del radio resulta

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{\frac{4}{3} R^2}{4} = \frac{2R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3} R.$$

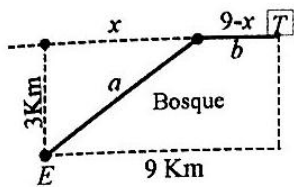
Por otro lado, se debe mostrar que: $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ y $\frac{V_E}{V_C} = \sqrt{3}$:

$$\frac{h}{r} = \frac{(2\sqrt{3}/3)R}{(\sqrt{6}/3)R} = \sqrt{2}, \quad \frac{V_E}{V_C} = \frac{(4/3)\pi R^3}{(4\sqrt{3}/9)\pi R^3} = \sqrt{3}$$

4.5.8 Una estación de telecomunicaciones situada en un bosque está a 3 Km. del punto más cercano de la carretera (recta). La distancia de este punto a una tienda situada en la carretera es de 9 Km. Si una persona desea caminar de la estación a la tienda en un tiempo

po mínimo. ¿Qué ruta debe seguir, si puede caminar a la velocidad de 4 Km/h por el bosque y 5 Km/h por la carretera?

Solución.



Camino de la estación a la tienda: $a + b$

$$a = v \cdot t \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} = 4t \Rightarrow t_a = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \text{ horas}$$

$$b = 9 - x = 5t \Rightarrow t_b = \frac{9 - x}{5}$$

$$\text{Tiempo total: } t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{9 - x}{5}, \quad x \in [0, 9]$$

$$t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 9}}{20\sqrt{x^2 + 9}} = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 25x^2 = 16(x^2 + 9)$$

$$\Rightarrow 9x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = 4 \in [0, 9]$$

reemplazando en la función tiempo, vemos que

$$t(0) = \frac{3}{4} + \frac{9}{5} = \frac{51}{20} = 2.55, \quad t(9) = \frac{\sqrt{90}}{4} \approx 2.372, \quad t(4) = \frac{5}{4} + 1 = 2.25 \text{ (mínimo)}$$

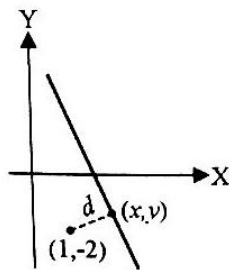
Por tanto, la persona debe caminar $a = \sqrt{9 + 16} = 5$ Km por el bosque y $b = 9 - 4 = 5$ Km por la carretera para llegar en un tiempo $t(4) = 2.25$ horas, el cual es mínimo.

4.5.9 Determine el punto (x, y) sobre la recta $y = 5 - 3x$, el cual es más cercano al punto $(1, -2)$.

Solución.

Usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos para $(1, -2)$ y $(x, y) = (x, 5 - 3x)$, y determinar en qué punto (x, y) esta distancia es mínima.

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (5-3x+2)^2} \Rightarrow d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (7-3x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Podemos considerar $g(x) = d^2$ para facilitar nuestro trabajo, pues maximizar d es lo mismo a maximizar d^2 , es decir:

$$g(x) = (x-1)^2 + (7-3x)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Derivando e igualando a cero:

$$g'(x) = 2(x-1) + 2(7-3x)(-3) = 4(5x-11) = 0$$

$$\Rightarrow x = 11/5 \text{ (p.c.)}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada donde $g'(x) = 4(5x-11) \Rightarrow g''(x) = 20$

Vemos que $g''(11/5) = 20 > 0$, es decir, que en $x = 11/5$ la distancia es mínima, luego $d(11/5) = \frac{2}{5}\sqrt{10} \approx 1.2649$. Por tanto, el punto más cercano al punto $(1, -2)$ que está sobre la recta es $(2.2, -1.6)$.

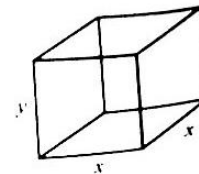
4.5.10 Se quiere construir una caja con base cuadrada y con tapa, que ha de tener una capacidad de 81 m^3 . Si el material para los lados cuesta S/. 2.00 por metro cuadrado, para la base y la tapa S/. 0.75 por metro cuadrado. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que el costo total sea mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución.

Costo total: c

Dimensiones de la caja: x, y

Área lateral: $4xy$



El costo total es:

$$c = 0.75(\text{área de la base}) + 0.75(\text{área de la tapa}) + 2.00(\text{área lateral}) = 1.5x^2 + 8xy \quad \dots\dots(1)$$

y volumen de la caja: $V = x^2y = 81 \Rightarrow y = \frac{81}{x^2}$ \dots\dots(II)

Reemplazando (II) en (I) tenemos: $c(x) = 1.5x^2 + 8x\left(\frac{81}{x^2}\right) = 1.5x^2 + \frac{648}{x}, \quad x > 0$

$$c'(x) = 3x - \frac{648}{x^2} = 3\left(\frac{x^3 - 216}{x^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} c'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 216 = 0 \Rightarrow x = 6 \\ c'(x) \text{ no existe} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_c \end{cases}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada se verifica que, las dimensiones de la caja que hacen que el costo sea mínimo son $x = 6$ m., $y = \frac{9}{4}$ m. y éste es

$$c(6) = 1.5(6)^2 + \frac{648}{6} = 162 \text{ soles.}$$

4.5.11 La esquina inferior derecha de una página se dobla hasta alcanzar el lado izquierdo, el ancho de la página es de 10 pulgadas:

a) Determine la longitud del pliegue.

b) ¿Qué ángulo forma el pliegue mínimo en el lado mayor derecho de la página?

Solución.

Queremos minimizar la longitud del pliegue y :

En el triángulo AEC (de la figura) se tiene: $\sin \alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0$

Además

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) + \theta = 180^\circ$$

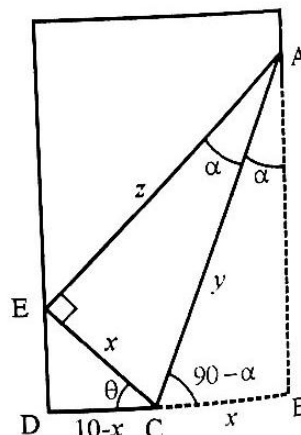
$$180^\circ - 2\alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = \theta$$

Luego $\cos 2\alpha = \cos \theta = \frac{10 - x}{x}$

Sabemos que

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - ((10 - x)/x)}{2}}$$

Por tanto, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2x - 10}{2x}} = \sqrt{\frac{x - 5}{x}}$



En (*) $y = \frac{x}{\sqrt{(x-5)/x}} = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-5}}$, donde $x \in (5, 10]$, derivando e igualando a cero tenemos

$$y' = \frac{\sqrt{x-5} \left(\frac{3}{2} x^{1/2} \right) - x^{3/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-5}} \right)}{x-5} = \frac{2x^{3/2} - 15x^{1/2}}{2(x-5)^{3/2}} = \frac{x^{1/2}(2x-15)}{2(x-5)^{3/2}} = 0$$

El único punto crítico es $x = 15/2$, los puntos $x = 0$ y $x = 5$ no son puntos críticos debido a que no pertenecen a $(5, 10]$. Usamos el criterio de la primera derivada:

- $x = 6 \in (5, 15/2]$, entonces $y' = \frac{+(-)}{+} = -$, de donde f es decreciente.
- $x = 9 \in (15/2, 10]$, entonces $y' = \frac{+(+)}{+} = +$, de donde f es creciente.

De ambos casos podemos concluir que existe un mínimo en el punto $x = 15/2$. Luego, el pliegue mínimo será

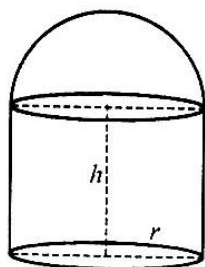
$$y = 15/2 \sqrt{\frac{5/2}{15/2}} = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Por otro lado, para saber el ángulo que forma el pliegue mínimo en el lado mayor derecho de la página calculamos

$$\cos 2\alpha = \frac{10 - x}{x} = \frac{10 - 15/2}{15/2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\alpha = \arccos \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}$$

4.5.12 Una lata de aceite debe tener un volumen de 1000 pulgadas cúbicas, su forma es la de un cilindro con fondo plano y cubierto por una semiesfera, como indica la figura. Despreciando el material del espesor de la lata, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

Solución.



Volumen de la lata: 1000 pulg³

Volumen del cilindro: $V_c = \pi r^2 h$

Volumen de la semiesfera: $V_e = \frac{2}{3} \pi r^3$

Volumen total: $V = V_c + V_e = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = 1000$,

$$\text{de donde } \pi r^2 h = 1000 - \frac{2}{3} \pi r^3 \Rightarrow h = \frac{3000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2} \quad \dots\dots\dots (\alpha)$$

Área del cilindro: $A_c = \pi r^2 + 2\pi rh$, Área de la semiesfera: $A_e = 2\pi r^2$.

La cantidad de material necesaria está dada por:

$$A = A_c + A_e = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh \quad \dots\dots\dots (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{3000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2} \right) = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{3000}{3\pi r^2} - \frac{2\pi r^3}{3\pi r^2} \right) = 3\pi r^2 + \frac{2000}{r} - \frac{4}{3} \pi r^2 \\ &= \frac{5}{3} \pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Además, $r > 0$ y $h = \frac{3000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2} > 0$, entonces $r \in \left(0, 5 \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} \right)$. Luego,

$A(r) = \frac{5}{3} \pi r^2 + \frac{2000}{r}$, $r \in \left(0, 5 \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} \right)$. Derivando e igualando a cero, tenemos

$$A'(r) = \frac{10\pi r}{3} - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 10\pi r^3 = 6000 \Rightarrow \pi r^3 = 600 = 2^3(75) \Rightarrow r = 2 \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \dots\dots (8)$$

Utilizando el criterio de la segunda derivada, donde $A''(r) = \frac{10\pi}{3} + \frac{4000}{r^3}$, se tiene

$A''\left(2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right) > 0$, es decir, $r = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ minimiza la cantidad de material necesaria. Luego reem-

plazando (δ) en (α) obtenemos $h = \frac{150}{\sqrt[3]{\pi^3(75)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$.

4.5.13 Cada página rectangular de un libro contiene 30 pulgadas cuadradas de impresión, y debe tener un margen de 2 pulgadas en la parte inferior y superior, y una pulgada a cada lado. ¿Cuál es el área mínima en dicha página?

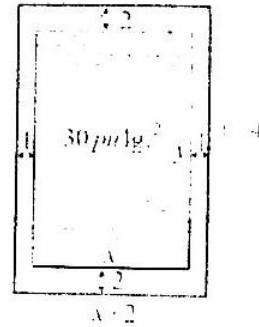
Solución.

Sean x y y las dimensiones del material impreso, mientras que $x+2$ y $y+4$ las dimensiones de la página. Debemos optimizar el área de la página:

$$A = (x+2)(y+4) \dots\dots\dots(\alpha)$$

Se sabe que el área de la página impresa es

$$xy = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{x} \dots\dots\dots(\beta)$$



Reemplazando (β) en (α) tenemos $A(x) = (x+2)\left(\frac{30}{x} + 4\right)$, $x > 0$

$$A'(x) = (x+2)\left(-\frac{30}{x^2}\right) + \frac{30}{x} + 4 = -\frac{30}{x} - \frac{60}{x^2} + \frac{30}{x} + 4 = -\frac{60}{x^2} + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{15}$$

Utilizando el criterio de la segunda derivada, donde $A''(x) = \frac{120}{x^3}$, se tiene $A''(\sqrt{15}) > 0$, es decir, se tiene área mínima cuando $x = \sqrt{15}$ y esta es

$$A = (\sqrt{15} + 2)\left(\frac{30}{\sqrt{15}} + 4\right) = 68.98 \text{ pulg}^2.$$

4.5.14 Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble que el de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizarán el costo si la capacidad deseada es de 10π pie³?

Solución.

Sean r (radio) y h (altura) las dimensiones del cilindro.

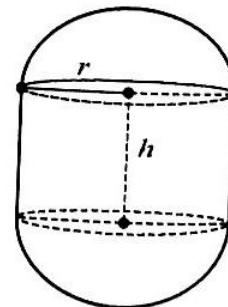
Volumen total = (volumen de la esfera) + (volumen del cilindro)

$$10\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

de donde

$$h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r$$

Por otro lado, el costo del tanque está dado por la función:



$$C = 2\left(\frac{1}{2}(\text{área de la esfera}) + \frac{1}{2}(\text{área de la esfera})\right) + 1(\text{área lateral del cilindro}) = 8\pi r^2 + 2\pi rh$$

Luego

$$C(r) = 8\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r \right) = 8\pi r^2 + \frac{20\pi}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 \Rightarrow C(r) = \frac{16}{3}\pi r^2 + \frac{20\pi}{r}, \quad r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{15}{2}} \right)$$

pues $r > 0$ y $h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r > 0$ de donde $r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{15}{2}} \right)$.

Derivando, obtenemos

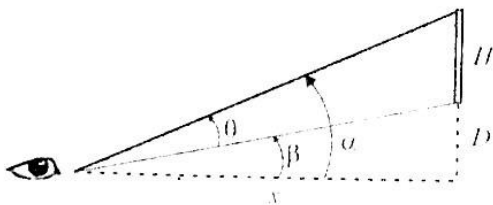
$$C'(r) = \frac{32\pi}{3}r - \frac{20\pi}{r^2} = 4\pi \left(\frac{8r^3 - 15}{3r^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} C'(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} & (\text{punto crítico}) \\ C'(r) \text{ no existe si } r^2 = 0 & \text{entonces } r = 0 \notin D_C \end{cases}$$

Por el criterio de la segunda derivada donde $C''(r) = \frac{32\pi}{3} + \frac{40\pi}{r^3}$, se tiene $C''\left(\frac{\sqrt[3]{15}}{2}\right) > 0$ (existe mínimo en $r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$), es decir, el costo del tanque será mínimo si sus dimensiones son $r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$ pies y $h = \frac{10}{\left(\frac{\sqrt[3]{15}}{2}\right)^2} - \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{15}}{2}\right) = 2\sqrt[3]{15}$ pies.

4.5.15 Una pintura de una exposición tiene una altura H , y se cuelga de tal modo que su orilla inferior esté a una distancia D arriba del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe pararse el observador para tener la mayor vista?

Solución.

Sea x la distancia del observador a la pared. La función θ es el ángulo de elevación que depende de x y es lo que queremos maximizar tanto como sea posible.



Considerando el gráfico vemos que

$$\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \theta = \alpha - \beta$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{H+D} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arccot} \left(\frac{x}{H+D} \right)$$

$$\cot \beta = \frac{x}{D} \Rightarrow \beta = \operatorname{arccot} \left(\frac{x}{D} \right)$$

$$\theta(x) = \operatorname{arccot} \left(\frac{x}{H+D} \right) - \operatorname{arccot} \left(\frac{x}{D} \right), \quad x \geq 0$$

$$\theta'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{H+D} \right)^2} \left(\frac{1}{H+D} \right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{D} \right)^2} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{H+D}{(H+D)^2 + x^2} + \frac{D}{D^2 + x^2}$$

$$\theta'(x) = \frac{D[(H+D)^2 + x^2] - (H+D)(D^2 + x^2)}{(D^2 + x^2)[(H+D)^2 + x^2]} = -\frac{H[x^2 - D(H+D)]}{(D^2 + x^2)[(H+D)^2 + x^2]}$$

Para encontrar los puntos críticos resolvemos $\theta'(x) = 0$:

$$-H[x^2 - D(H+D)] = 0 \Rightarrow x = \sqrt{D(H+D)}$$

Aplicando el criterio de la primera derivada se verifica que en $x = \sqrt{D(H+D)}$ se tiene máximo, es decir, la distancia óptima entre la pared y el observador es $x = \sqrt{D(H+D)}$ de modo que el observador tenga mayor visualización del cuadro.