Examen de Análisis I - 1er Hemisemestre.

Curso 1ro Paralelo 4to

1) Calcular: a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3+x-2}$ y b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n \dfrac{n^3}{1+n^4}$

2) Calcular: $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

3) Si $\lim\limits_{x \to p} f(x) = F$ y

$\lim\limits_{x \to p} g(x) = G$

Demostrar que

$\lim\limits_{x \to p} (g(x) - f(x)) = G - F$

4) Demuestre que f es continua en $(-\infty; +\infty)$

Si $f(x) = \begin{cases} x; & \text{si } x \geq 1 \\ x^2; & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^3; & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

5) Sea $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4$

a) Usar el Teorema de Descartes para determinar el número posible de ceros reales positivos y ceros reales negativos.

b) Encuentre un cero positivo aproximado en el intervalo $(0; 1)$ con un error menor que 0,3

$x^3 + x - 2$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & & \end{array}$$

$(x+1)(x^2+x+2)$

$x^3+x^2+2x+x^2$

$(x-1)(x^2+x+2)$

$x^3+\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}-x-2$

x^3+x-2

$\frac{4+5}{8}$

$\frac{9}{8}$

Nota

Examen Análisis I - Supletorio

R^2 $\frac{\sqrt{3}R}{9}$ 2 R^2-

1) Calcular:

(2) a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3+x-2}$ $= \lim\limits_{x\to 1} (x+\ )(x-\ )$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x+2)$

(2) b) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

(2) c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

(3) 2) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2\cos x, & \text{si } x\le c \\ a x^2+b, & \text{si } x>c \end{cases}$

$\frac{9R^2-3R^2}{9}$

siendo $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ constantes. Si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ están dados, hallar todos los valores de $\underline{a}$ (si existe alguno) para los que f es continua en el punto $\underline{x} = c$.

$\frac{6R^2}{9}$

3) Calcular $f'(x)$

(2) a) Utilizando la definición de derivada si $f(x)=\cos 3x$

$\frac{R\sqrt{6}}{3}$

(2) b) si $f(x)=\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - \operatorname{tg}^2 3x}$

(3) 4) La ecuación $3x^2+y^2=12$ define implícitamente dos funciones y de x si $|x|\le 2$. Supuesto que la segunda derivada y'' existe, demostrar que verifica la ecuación $4y^3y''=-9$

(4) 5) Dada una esfera de radio R. Calcular, en función de R, el radio $\underline{r}$ y la altura $\underline{h}$ del cono circular recto de mayor volúmen que puede inscribirse en esa esfera.

$V=\pi r^2 h$

$=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h$

$R^2=r^2+\frac{h^2}{4}$

$=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right)$

$R^2h-\frac{\pi}{4}h^3$

$R^2-\frac{3}{4}\pi h^2=0$

$R^2=\frac{3}{4}\pi h^2$

h^2

ingeuce.tk

Solucion supletoria

NOTA: los ejercicios 4 y 5 se encuentran resueltos en la seccion de ejercicios resueltos de derivada implicita y aplicacion de maximos y minimos, del libro de Apostol.

1) calcular

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)} = \frac{3}{4}$$

b) $$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}\cdot\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8} = \lim_{x\to 64}\frac{(\sqrt[3]{x}-4)(\sqrt{x}+8)}{x-64}$$

$$= \lim_{x\to 64}\frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt[3]{x}-4)\left[(\sqrt[3]{x})^2+4\sqrt[3]{x}+16\right]}{(x-64)\left[(\sqrt[3]{x})^2+4\sqrt[3]{x}+16\right]}$$

$$= \lim_{x\to 64}\frac{(\sqrt{x}+8)\cancel{(x-64)}}{\cancel{(x-64)}\left[(\sqrt[3]{x})^2+4\sqrt[3]{x}+16\right]}$$

$$= \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}+8}{(\sqrt[3]{x})^2+4\sqrt[3]{x}+16} = \frac{\sqrt{64}+8}{(\sqrt[3]{64})^2+4\sqrt[3]{64}+16} = \frac{16}{16+16+16}$$

$$= \frac{16}{3(16)} = \frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}$$

sea $u = x-a$; $x-a\to 0$ cuando $x\to a$; $x = u+a$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u+a)-\operatorname{sen}a}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{u+a-a}{2}\right)\cos\left(\frac{u+a+a}{2}\right)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u+2a}{2}\right)}{u}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}}\cdot\lim_{u\to 0}\cos\left(\frac{u+2a}{2}\right) = 1\cdot\cos a$$

$$= \cos a$$

3) Calcular $f'(x)$

a) Utilizando la definición de derivada si $f(x) = \cos 3x$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos 3(x+h) - \cos 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3x+3h) - \cos 3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3x+3h+3x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{3x+3h-3x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3h}{2}\right)\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{6x+3h}{2}\right)}{h} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{3h}{2}\right)}{\frac{3h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{6x+3h}{2}\right)$$

$$= -1 \cdot \left(3 \lim_{h\to 0} \mathrm{sen}\left(\frac{6x+3h}{2}\right)\right) = (-1)\left[3\,\mathrm{sen}\left(\frac{6x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\left[3\,\mathrm{sen}\,3x\right] = -3\,\mathrm{sen}\,3x$$

b) si $f(x) = \sqrt{\cos \frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{-\mathrm{sen}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)\left(\frac{(3x-2)(2)-(2x+3)(3)}{(3x-2)^2}\right) - 2\,tg\,3x\left(\sec^2 3x\right)(3)\right\}}{\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{-\mathrm{sen}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)\left[\frac{6x-4-6x-9}{(3x-2)^2}\right] - 6\,tg\,3x\left(\sec^2 3x\right)\right\}}{\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{-\mathrm{sen}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)\left[-\frac{13}{(3x-2)^2}\right] - 6\,tg\,3x\left(\sec^2 3x\right)\right\}}{\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{\frac{13\,\mathrm{sen}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right) - 6\,tg\,3x\left(\sec^2 3x\right)(3x-2)^2}{(3x-2)^2}\right\}}{\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+3}{3x-2} - 6\,tg\,3x\,\sec^2 3x\,(3x-2)^2}{(3x-2)^2\sqrt{\cos\frac{2x+3}{3x-2} - tg^2 3x}}$$