1º Sea el conjunto $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 5x + 2y + 3z = 0\}$. Compruebe que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Determine una base de W y halle $\dim W$. Utilice esta base de W para construir una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

i) Probemos que W es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$:

$(0,0,0) \in W$, pues $5(0) + 2(0) + 3(0) = 0$.

Ahora, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(x_1, y_1, z_1) \in W$; $(x_2, y_2, z_2) \in W$

$$\boxed{PD: \alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2) \in W}$$

En efecto:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

Ahora:

$$5(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + 3(\alpha z_1 + \beta z_2)$$
$$= 5\alpha x_1 + \boxed{5\beta x_2} + 2\alpha y_1 + \boxed{2\beta y_2} + 3\alpha z_1 + \boxed{3\beta z_2}$$
$$= \alpha\underbrace{(5x_1 + 2y_1 + 3z_1)}_{0} + \beta\underbrace{(5x_2 + 2y_2 + 3z_2)}_{0} \quad \left(\text{pues } (x_1,y_1,z_1) \in W, \ (x_2,y_2,z_2) \in W\right)$$
$$= \alpha(0) + \beta(0) = 0.$$

Así, $\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in W \quad \therefore W$ es s.e.v.

Hallemos una base de W:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 5x + 2y + 3z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \frac{-5x - 2y}{3}\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -\tfrac{5}{3}x - \tfrac{2}{3}y\} = \{(x, y, -\tfrac{5}{3}x - \tfrac{2}{3}y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1, 0, -\tfrac{5}{3}) + y(0, 1, -\tfrac{2}{3}) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Se puede ver que $\{(1, 0, -\frac{5}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})\}$ es una base de W

Una base de $\mathbb{R}^3$ es $B = \{(1,0,-\frac{5}{3}), (0,1,-\frac{2}{3}), (0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

2: Sea V un espacio vectorial, $x, y, z \in V$.

Demostrar que:

$\{x, y, z\}$ es L. I., si y sólo si, $\{x+y, x+z, y+z\}$ es L. I.

Solución.

$\Rightarrow$ Hipótesis: $\{x,y,z\}$ es L. I.

$\boxed{\text{PD: } \{x+y, x+z, y+z\} \text{ es L. I.}}$

Sea $\alpha(x+y) + \beta(x+z) + \gamma(y+z) = 0$

$\Rightarrow \alpha x + \alpha y + \beta x + \beta z + \gamma y + \gamma z = 0$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)x + (\alpha+\gamma)y + (\beta+\gamma)z = 0$

pues $\{x,y,z\}$ es L. I.

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0$ ① $\rightarrow \alpha + \beta = 0$

$\alpha + \gamma = 0$ ② $\rightarrow -\alpha + \gamma = 0$

$\beta + \gamma = 0$ ③ $\qquad \beta - \gamma = 0$ ④

③ + ④ : $\beta + \gamma = 0$

$\beta - \gamma = 0$

$2\beta = 0 \rightarrow \boxed{\beta = 0} \Rightarrow \boxed{\gamma = 0} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$\Leftarrow$ Hipótesis: $\{x+y, x+z, y+z\}$ es L. I.

$\boxed{\text{PD: } \{x, y, z\} \text{ es L. I.}}$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. (tal que)

$\alpha(x+y) + \beta(x+z) + \gamma(y+z) = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)(x+y) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)(x+z) + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)(y+z) = 0$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 0$ ① (Pues $\{x+y, x+z, y+z\}$ es L.I)

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0$ ② $\Rightarrow \boxed{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0}$

$-\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 0$ ③

$\therefore \{x, y, z\}$ es L. I.

3: Señale V o F, y justifique:

El vector $\omega = (1,-1,2)$ pertenece al subespacio generado por $u = (1,2,3)$ y $v = (3,2,1)$.

Solución: Debemos hallar α, β t.q:

$$(1,-1,2) = \alpha(1,2,3) + \beta(3,2,1)$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 1 = \alpha + 3\beta \longrightarrow -2 = -\cancel{2\alpha} - 6\beta \\
&(2) \quad -1 = 2\alpha + 2\beta \longrightarrow -1 = \cancel{2\alpha} + 2\beta \\
&(3) \quad 2 = 3\alpha + \beta \qquad\quad -3 = -4\beta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\beta = \frac{3}{4}}$$

en (1): $\alpha = 1 - 3\beta$

$$\alpha = 1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\alpha = 1 - \frac{9}{4}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{5}{4}}$$

Reemplazo α y β en (3):

$$2 = 3\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}$$

$$2 = -\frac{12}{4}$$

$$2 = -3 \quad (\text{falso!!})$$

∴ ω NO PERTENECE AL SUBESPACIO GENERADO POR u y v

∴ El enunciado es FALSO!!

4: Sea $V = \{(x,x,x) / x \in \mathbb{R}\}$. Verifique que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Halle un subespacio W de $\mathbb{R}^3$, tal que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Solución

Probemos que $(0,0,0) \in V$:

$(0,0,0) \in V$ pues $x = y = z = 0$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x_1,x_1,x_1) \in V$, $(x_2,x_2,x_2) \in V$,

PD: $\alpha(x_1,x_1,x_1) + \beta(x_2,x_2,x_2) \in V$

se tiene que:

$$\alpha(x_1,x_1,x_1) + \beta(x_2,x_2,x_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2) \in V$$ (pues las tres componentes son iguales).

$\therefore V$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ahora, sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ (plano que pasa por $(0,0,0)$) (es s.e.v. de dimensión 2)

Probemos que $\mathbb{R}^3 = V + W$

Es evidente que $V + W \subset \mathbb{R}^3$

Probemos que $\mathbb{R}^3 \subset V + W$:

Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (a,b,c) = \underbrace{(c,c,c)}_{\in V} + \underbrace{(a-c,b-c,0)}_{\in W}$.

así, $\mathbb{R}^3 = V + W$.

además, $V \cap W = \{(0,0,0)\}$, pues

$\{(0,0,0)\} \subset V \cap W$ y si $(x,y,z) \in V \cap W \Rightarrow x = y = z \wedge z = 0$

$\Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,0)\}$.

Por tanto, $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.