EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL.

1) Dados $u = (1,3)$ y $v = (-1,4)$. Sean $F_1 = S(u)$, $F_2 = S(v)$.
Muestre que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

2) Sean $F_1 = S(u_1, v_1)$ y $F_2 = S(u_2, v_2)$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$, generados por los vectores $u_1 = (1,1,1)$, $v_1 = (2,-1,3)$, $u_2 = (-2,0,1)$, $v_2 = (3,1,0)$.
Halle números a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2, tales que se tenga:

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a_1x + b_1y + c_1z = 0\}.$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a_2x + b_2y + c_2z = 0\}.$$

3) En el ejercicio anterior, muestre que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.
Encuentre un vector no nulo $w \in F_1 \cap F_2$ y concluya que $\mathbb{R}^3 \neq F_1 \oplus F_2$.

4) Demuestre que, $S(X)$ es la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen al conjunto X. (Con $X \subset E$ y E e.v.).

5) Demuestre que la matriz $D = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$, puede ser escrita como, la combinación lineal de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6) Señale V o F, y justifique:

F i) El vector $w = (1,-1,2)$ pertenece al subespacio generado por $u = (1,2,3)$ y $v = (3,2,1)$.

V ii) Cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $u = (5,3,2)$ y $v = (3,-1,3)$.

7) Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales? (Justifique):

i) El conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$, formado por los vectores (x, y, z), tales que $z = 3x$ y $x = 2y$. V

ii) El conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$, formado por los vectores (x, y, z), tales que $xy = 0$.

iii) El conjunto $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, formado por las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $f(x+1) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8) Sean A, B subespacios vectoriales de E. Demuestre que:
$(A \cup B)$ es un subespacio de $E \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A$.

9) Sea F un subespacio vectorial de E. Señale V o F (Justifique):

i) Si $u \notin F$ y $v \notin F$, entonces $(u+v) \notin F$

ii) Si $u \notin F$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha u \notin F$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

10) Demuestre que el vector $b = (1, 2, 2)$ no es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, 1, 2)$ y $v_2 = (1, 2, 1)$. A partir de esto, formule un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, que no posee solución y que tiene el vector b como segundo miembro.

11) Escriba V o F (Justifique):
Para cualquier subconjunto $X, Y \subset E$, se tiene:

i) $S(X \cup Y) = S(X) + S(Y)$

ii) $S(X \cap Y) = S(X) \cap S(Y)$.

(Pregunta: Cuál sería el subespacio vectorial generado por el conjunto vacío?
Convenimos que $S(\emptyset) = \{0\}$)

12) Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \{(x, y, 0, w) / x, y, w \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, y, z, w) / y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Pruebe que W_1 y W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^4$

(b) Determine $W_1 \cap W_2$, y pruebe que es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

13) Considere el conjunto V de $\mathbb{R}^3$, que en cada ítem se propone. Verifique que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Halle un subespacio W de $\mathbb{R}^3$, tal que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

i) $V = \{(x, x, x) / x \in \mathbb{R}\}$.

ii) $V = \{x(1, 0, 2) + y(-1, 4, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$.

14) Sea P_3, el espacio vectorial de todos los polinomio de grado ≤ 3 (con coeficientes reales), junto con el polinomio cero. Sean los subconjuntos K_1 y K_2 de P_3, definidos así:

$$K_1 = \{p \in P_3 / p(t) = a + bt^2\}$$

$$K_2 = \{q \in P_3 / q(t) = at + bt^3\}.$$

(a) Demuestre que K_1 y K_2 son s.e.v. de P_3

(b) Demuestre que $P_3 = K_1 \oplus K_2$.

15) En los ítems siguientes, pruebe que el subconjunto S de $\mathbb{R}^2$, que se propone, genera a $\mathbb{R}^2$:

(a) $S = \{(3, 2), (4, 6), (1, 4)\}$

(b) $S = \{(-2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$

(c) $S = \{(4, 5), (-1, 3)\}$.