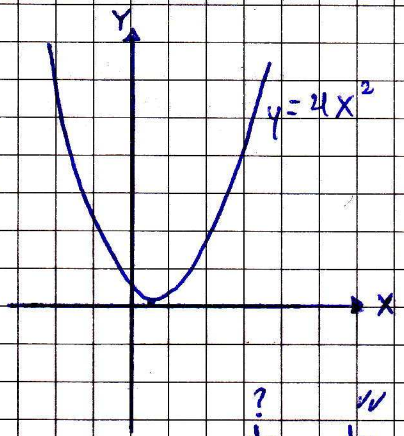
2. Un punto se mueve sobre la parabola $y = 4x^2$, de tal manera que x aumenta con una razon uniforme de 3 unidades por segundo. Encontrar la razón de cambio de la ordenada y cuando $x = 2$.



Datos:

$$\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{unid}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$\overset{?}{\frac{dy}{dt}} = \overset{\checkmark}{\frac{dy}{dx}} \cdot \overset{*}{\frac{dx}{dt}}$$

Como: $y = 4x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 8x \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 8x \cdot 3\ \dfrac{unid}{s}$

$$\frac{dy}{dt} = 24x\ \frac{unid}{s}$$

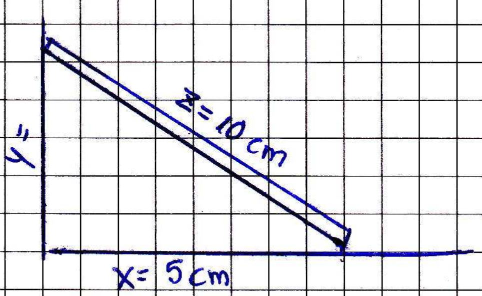
$$\boxed{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=2} = 24(2)\ \frac{unid}{s} = 48\ \frac{unid}{s}}$$

3. Una escalera de 10 cm se apoya contra una pared. Hallar la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el extremo inferior se aleja de la pared a una velocidad de $1\ m/s$ y se encuentra a una distancia de 5cm de ella.

Datos

$$\frac{dx}{dt} = 1\frac{m}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



$$\overset{?}{\frac{dy}{dt}} = \overset{\checkmark}{\frac{dy}{dx}} \cdot \overset{*}{\frac{dx}{dt}}$$

$10^2 = 5^2 + y^2$

$y^2 = 100 - 25$

$y = \sqrt{75}$

$y = 5\sqrt{3}$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=5cm} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1\ \frac{m}{s} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{m}{s}}$$

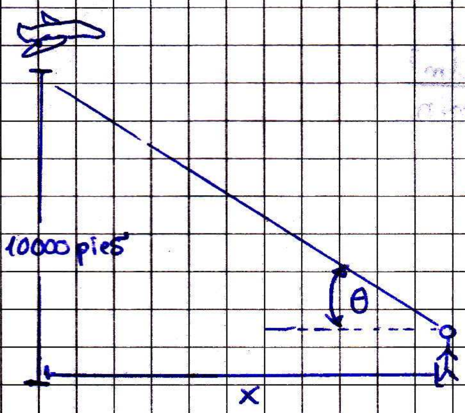
$y = \sqrt{100 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5cm} = -\frac{5}{\sqrt{100-25}} = -\frac{5}{5\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

4. Un avión que vuela con rapidez constante a una altura de 10000 pies sobre una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado el observador nota que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{\pi}{3}$ rad y aumenta a una tasa de $\frac{1}{60}\frac{rad}{s}$.

Determine la rapidez del avión.



Datos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{60}\frac{rad}{s}$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$$\overset{?}{\frac{dx}{dt}} = \overset{\Downarrow}{\frac{dx}{d\theta}} \cdot \overset{\times}{\frac{d\theta}{dt}}$$

$$tg\theta = \frac{10000}{x}$$

$$x = \frac{10000}{tg\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{tg\theta \cdot 0 - 10000(\sec^2\theta)}{tg^2\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{10000\sec^2\theta}{tg^2\theta}$$

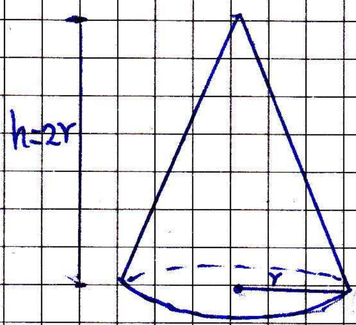
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{10000\sec^2\theta}{tg^2\theta} \cdot \frac{1}{60}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}rad} = -\frac{1000\cancel{0}\sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{tg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1}{6\cancel{0}}$$

$$= -\frac{500\sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{tg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}rad} = 125\ \text{pies}/s}$$

Sobre un monton cónico cae arena a razon de 10 dm^3/min. El radio de la base es constante e igual a la mitad de su altura. Se pide la Velocidad con que crece la altura del cono en el instante en que su valor es de 5 dm.



Datos:

$$\frac{dV}{dt} = 10\ \frac{dm^3}{min}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$h = 2r$

$r = \frac{h}{2}$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^2}{4}\, h$$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dh} = \frac{3}{12}\pi h^2 = \frac{\pi h^2}{4} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=5dm} = \frac{25}{4}\pi\, dm^2$$

$$\overset{*}{\frac{dV}{dt}} = \overset{\checkmark}{\frac{dV}{dh}} \cdot \overset{?}{\frac{dh}{dt}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5dm} = \frac{\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=5dm}}{\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=5dm}} = \frac{10\frac{dm^3}{min}}{\frac{25\pi dm^2}{4}}$$

$$= \frac{\overset{8}{\cancel{40}}\ dm^{\cancel{3}}}{\underset{5}{\cancel{25}}\pi\ \cancel{dm^2}\ min}$$

$$\boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5dm} = \frac{8}{5\pi}\ \frac{dm}{min}}$$