PRUEBA ÁLGEBRA LINEAL   30-ABRIL-2013

1º Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(5,0) \longrightarrow T(5,0) = (2,1,4)$

$(0,-2) \longrightarrow T(0,-2) = (1,1,1)$, una aplicación lineal.

(a) Hallar $T(x,y)$.

(b) Hallar $\ker(T)$ y $\dim \ker(T)$

(c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? ¿Es T biyectiva?

2º Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, y T una aplicación lineal, $T: V \longrightarrow W$.

(a) Pruebe que, si $\dim V < \dim W$, entonces T no es sobreyectiva

(b) Sea V_1 s.e.v. de V, se define $T(V_1) = \{y \in W / \text{existe } x \in V_1,$ tal que $T(x) = y\}$. Demuestre que $T(V_1)$ es s.e.v. de W.

3º Sea $\{X, Y\}$ una base de un e.v. V.

Mostrar que, tanto $\{X+Y, X-Y\}$ como $\{aX, bY\}$ son bases de V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.

CORRECCIÓN PRUEBA (SOBRE 6).

ÁLGEBRA LINEAL I

1: Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(5,0) \longrightarrow T(5,0) = (2,1,4)$

$(0,-2) \longrightarrow T(0,-2) = (1,1,1)$

(a) Hallar $T(x,y)$

(b) Hallar $\ker(T)$ y $\dim \ker(T)$

(c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? ¿Es T biyectiva?

Solución:

(a) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, como $\{(5,0),(0,-2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

$(x,y) = \alpha(5,0) + \beta(0,-2)$

$(x,y) = (5\alpha, 0) + (0, -2\beta) \Rightarrow (x,y) = (5\alpha, -2\beta)$

$\Rightarrow x = 5\alpha, \quad y = -2\beta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{x}{5}}, \quad \boxed{\beta = -\frac{y}{2}}$

Así, $(x,y) = \frac{x}{5}(5,0) + \left(-\frac{y}{2}\right)(0,-2)$

$$T(x,y) = \frac{x}{5}T(5,0) - \frac{y}{2}T(0,-2) = \frac{x}{5}(2,1,4) - \frac{y}{2}(1,1,1)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{2x}{5}, \frac{x}{5}, \frac{4x}{5}\right) - \left(\frac{y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

$$\boxed{T(x,y) = \left(\frac{2x}{5} - \frac{y}{2}, \frac{x}{5} - \frac{y}{2}, \frac{4x}{5} - \frac{y}{2}\right)}$$

(b) $(x,y) \in \ker(T) \Rightarrow T(x,y) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{5} - \frac{y}{2}, \frac{x}{5} - \frac{y}{2}, \frac{4x}{5} - \frac{y}{2}\right) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{2} = 0 & (1) \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0 & (2) \\ \frac{4x}{5} - \frac{y}{2} = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) y (2)

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \frac{2x}{5} - \frac{y}{2} = 0 \\ -\frac{2x}{5} + y = 0 \\ \hline \frac{y}{2} = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{y=0} \rightarrow \boxed{x=0}$$

Estos valores cumplen (3)

Así, $(x,y) = (0,0) \Rightarrow \ker(T) = \{(0,0)\}$ //

$\Rightarrow \dim \ker(T) = 0$ //

(c) T es inyectiva

Por teor. de núcleo e imagen:

$\cancel{\dim \ker}(T) + \dim R(T) = \dim \mathbb{R}^2$

$\dim R(T) = 2$, T NO es sobreyectiva

$\therefore$ T NO es biyectiva

2º Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita, y T una aplicación lineal $T: V \longrightarrow W$.

(a) Pruebe que, si $\dim V < \dim W$, entonces T NO es Sobreyectiva

(b) Sea V_1 s.e.v. de V, se define $T(V_1) = \{Y \in W \,/\, \text{existe } x \in V_1$ tal que $T(x) = Y\}$. Demuestre que $T(V_1)$ es s.e.v. de W

Solución. (a) Hipótesis: $\dim V < \dim W$ $\boxed{\text{PD: T NO es sobreyectiva}}$

Suponga que T sí es sobreyectiva:

entonces $R(T) = W$ y $\dim R(T) = \dim W$,

Por el teor. del núcleo e imagen:

$\dim \ker(T) + \dim R(T) = \dim V$

$\dim \ker(T) + \dim W = \dim V < \dim W$ (Reemplazo, y uso la hipótesis).

$\Rightarrow \dim \ker(T) + \cancel{\dim W} < \cancel{\dim W}$

$\Rightarrow \dim \ker(T) < 0$ (Contradicción, pues $\dim \ker(T) \geq 0$

$\therefore$ T NO es sobreyectiva.

(b) Es evidente que $T(V_1) \subset W$

Además como $T(0) = 0$, $0 \in T(V_1)$, pues $0 \in V_1$

$\boxed{\text{PD: } (\alpha Y_1 + \beta Y_2) \in T(V_1)}$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $Y_1, Y_2 \in T(V_1)$

Como $Y_1 \in T(V_1)$, $\exists\, x_1 \in V_1$ t.q. $T(x_1) = Y_1$

Como $Y_2 \in T(V_1)$, $\exists\, x_2 \in V_1$ t.q. $T(x_2) = Y_2$

así, tome $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, con $x \in V_1$

y se tiene $T(x) = T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$

$= \alpha Y_1 + \beta Y_2 \Rightarrow$ $(\alpha Y_1 + \beta Y_2) \in T(V_1)$.

$\therefore T(V_1)$ es s.e.v. de W.

3: Sea $\{X, Y\}$ una base de un e.v. V.
Mostrar que, tanto $\{X+Y, X-Y\}$ como $\{aX, bX\}$ son bases de V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.

Solución. Como $\{X, Y\}$ es una base de V, $\boxed{\dim V = 2}$.

Basta probar que $\{X+Y, X-Y\}$ son L. I:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q: $\alpha(X+Y) + \beta(X-Y) = 0$

$$\Rightarrow \alpha X + \alpha Y + \beta X - \beta Y = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)X + (\alpha-\beta)Y = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = 0 \wedge \alpha - \beta = 0$$ (pues $\{X, Y\}$ es L.I)

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0 \wedge \beta = 0} \therefore \{X+Y, X-Y\} \text{ es L.I.}$$

$\therefore \{X+Y, X-Y\}$ es una base de V.

Basta probar que $\{aX, bY\}$ es L.I:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q: $\alpha(aX) + \beta(bY) = 0$

$$\Rightarrow (\alpha a)X + (\beta b)Y = 0 \Rightarrow \alpha a = 0 \wedge \beta b = 0$$ (pues $\{X, Y\}$ es L.I)

$$\Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \text{ (pues } a \neq 0, b \neq 0)$$

$\therefore \{aX, bY\}$ es L.I

$\therefore \{aX, bY\}$ es base de V