ingeuce.wix.com/ingeuce2

PRUEBA ÁLGEBRA LINEAL 30-ABRIL-2013

1º- Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(4,0) \longrightarrow T(4,0) = (2,-1,3)$

$(0,-1) \longrightarrow T(0,-1) = (-1,2,1)$, una aplicación lineal

(a) Hallar $T(x,y)$

(b) Hallar $\ker(T)$ y $\dim \ker(T)$

(c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? ¿Es T biyectiva?

2º Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \longrightarrow W$, una aplicación lineal

(a) Pruebe que, si $\dim V > \dim W$, entonces T no es inyectiva

(b) Sea W_1 un s.e.v. de W, sea el conjunto $B = \{x \in V / T(x) \in W_1\}$. Demuestre que B es s.e.v. de V.

3º Sea $\{X, Y\}$ una base de un e.v. V. Mostrar que, tanto $\{X+Y, X-Y\}$ como $\{aX, bY\}$ son bases de V, donde a y b son escalares arbitrarios **no nulos**.

visita $\boxed{\text{ingeuce.tk}}$

ó ingeuce-2.tk

CORRECCIÓN PRUEBA (sobre 6 puntos)

ÁLGEBRA LINEAL I   30-ABRIL-2013

1º Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(4,0) \longrightarrow T(4,0) = (2,-1,3)$

$(0,-1) \longrightarrow T(0,-1) = (-1,2,1)$ una aplicación lineal.

(a) Hallar $T(x,y)$

(b) Hallar $\ker(T)$ y $\dim \ker(T)$

(c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? ¿Es T biyectiva?

Solución

(a) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; como $\{(4,0) y (0,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$,

$(x,y) = \alpha(4,0) + \beta(0,-1) \Rightarrow (x,y) = (4\alpha, 0) + (0,-\beta)$

$\Rightarrow (x,y) = (4\alpha, -\beta)$

$\Rightarrow x = 4\alpha, \quad y = -\beta$

$\boxed{\alpha = \frac{x}{4}}$; $\boxed{\beta = -y}$

Así, $(x,y) = \frac{x}{4}(4,0) + (-y)(0,-1)$

$\Rightarrow T(x,y) = \frac{x}{4} T(4,0) - y\, T(0,-1) = \frac{x}{4}(2,-1,3) - y(-1,2,1)$

$T(x,y) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{4}, \frac{3x}{4}\right) - (-y, 2y, y)$

$$\boxed{T(x,y) = \left(\frac{x}{2} + y, -\frac{x}{4} - 2y, \frac{3x}{4} - y\right)}$$

(b) $(x,y) \in \ker T \Leftrightarrow T(x,y) = (0,0,0)$

$\left(\frac{x}{2} + y, \frac{-x}{4} - 2y, \frac{3x}{4} - y\right) = (0,0,0)$,

$\Rightarrow \frac{x}{2} + y = 0$ ①

$-\frac{x}{4} - 2y = 0$ ②

$\frac{3x}{4} - y = 0$ ③

① y ③:

$\frac{x}{2} + \cancel{y} = 0$

$\frac{3x}{4} - \cancel{y} = 0$

$\frac{5x}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \boxed{y=0}$

$\Rightarrow \ker(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow \dim \ker(T) = 0$

(c) T es inyectiva ✓

Por Teorema de Núcleo e Imagen:

$$\dim \overset{0}{\ker(T)} + \dim R(T) = \dim \mathbb{R}^2$$

$$\dim R(T) = 2$$

Por lo tanto T NO es sobreyectiva.

∴ T NO es biyectiva

2: Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal.

(a) Pruebe que, si $\dim V > \dim W$, entonces T NO es inyectiva

(b) Sea W_1 un s.e.v. de W, sea el conjunto $B = \{x \in V / T(x) \in W_1\}$. Demuestre que B es s.e.v. de V

Solución.

(a) Hip: $\dim V > \dim W$ $\boxed{\text{PD : T NO es inyectiva}}$

Suponga que T es inyectiva, $\cancel{\ker(T) = \{0\}}$

Por el teorema del Núcleo e Imagen:

$$\dim \overset{0}{\ker(T)} + \dim R(T) = \dim V \ ;$$

$$\dim R(T) = \dim V > \dim W \quad (\text{Hipótesis})$$

$$\Rightarrow \dim R(T) > \dim W \quad (\text{Contradicción, pues } \dim R(T) \leq \dim W)$$

∴ T es inyectiva.

(b) Es evidente que $B \subset V$,

además, como $T(0) = 0 \in W_1$ (pues W_1 es s.e.v. de W)

$\Rightarrow 0 \in B$.

También sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $x_1, x_2 \in B$ $\boxed{\text{PD: } (\alpha x_1 + \beta x_2) \in B}$

$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$, pero $T(x_1), T(x_2) \in W_1$

$\Rightarrow T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_1 \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2) \in B$

∴ B es s.e.v. de V

3: Sea $\{X, Y\}$ una base de un e.v. V. Mostrar que: tanto $\{X+Y, X-Y\}$ como $\{aX, bY\}$ son bases de V, donde a y b son escalares arbitrarios no nulos.

Solución. Como $\{X, Y\}$ es base de V, se tiene que $\dim V = 2$.

Basta probar que $\{X+Y, X-Y\}$ es L.I:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q: $\alpha(X+Y) + \beta(X-Y) = 0$

$$\Rightarrow \alpha X + \alpha Y + \beta X - \beta Y = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)X + (\alpha-\beta)Y = 0$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta = 0 \wedge \alpha - \beta = 0 \quad (\text{Pues } \{X, Y\} \text{ es L.I.})$$

$\therefore \{X+Y, X-Y\}$ es base de V.

También

Basta probar que $\{aX, bY\}$ es L.I:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q:

$$\alpha(aX) + \beta(bY) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha a)X + (\beta b)Y = 0 \Rightarrow \alpha a = 0 \wedge \beta b = 0 \quad (\text{pues } \{X, Y\} \text{ es L}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \quad (\text{pues } a \neq 0, b \neq$$

④

5. Se quería probar que $\{X+Y, X-Y\}$ generan a V:

Sea $w \in V$
PD: $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:
$\omega = \alpha(X+Y) + \beta(X-Y)$

Sea $w \in V$
Por hipótesis existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
t.q: $\omega = t_1 X + t_2 Y$ iguales

$$\Rightarrow \omega = \frac{t_1}{2}\left[(X+Y)+(X-Y)\right] + \frac{t_2}{2}\left[(X+Y)-(X-Y)\right]$$

$$\omega = \left(\frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2}\right)(X+Y) + \left(\frac{t_1}{2} - \frac{t_2}{2}\right)(X-Y)$$

Tomando $\alpha = \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2}$, $\beta = \frac{t_1}{2} - \frac{t_1}{2}$ (existen α, β)

Se tiene $\omega = \alpha(X+Y) + \beta(X-Y)$

Se quería probar que $\{aX, bY\}$ genera a V.

PD: Sea $w \in V$,
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:
$\omega = \alpha(aX) + \beta(bY)$

Sea $w \in V$, por hipótesis existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
t.q: $w = t_1 X + t_2 Y$

$$\Rightarrow w = \frac{t_1}{a}(aX) + \frac{t_2}{b}(bY)$$

tomando $\alpha = \frac{t_1}{a}$, $\beta = \frac{t_2}{b}$ (existen tales α, β).

$$\Rightarrow w = \alpha(aX) + \beta(bY)$$