CORRECCIÓN PRUEBA DE DEBERES, ÁLGEBRA LINEAL

1: Sea P_3, el espacio vectorial de todos los polinomios de grado ≤ 3 (con coeficientes reales), junto con el polinomio cero. Sean los conjuntos K_1 y K_2 de P_3, definidos así:

$$K_1 = \{p \in P_3 / p(t) = a + bt^2\}$$

$$K_2 = \{q \in P_3 / q(t) = ct + dt^3\}$$

(a) Demuestre que, K_1 y K_2 son s.e.v. de P_3.

(b) Demuestre que $P_3 = K_1 \oplus K_2$

Solución

(a) Probemos que K_1 es s.e.v. de P_3:

$0 \in K_1$, pues $0 = 0 + 0t^2$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p_1(t) = a_1 + b_1 t^2$, $p_2(t) = a_2 + b_2 t^2$

$\boxed{PD: \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \in K_1}$

$$\Rightarrow \alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$$
$$= \alpha (a_1 + b_1 t^2) + \beta (a_2 + b_2 t^2)$$
$$= \alpha a_1 + \alpha b_1 t^2 + \beta a_2 + \beta b_2 t^2$$
$$= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) t^2 \text{ ; así } \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \in K_1.$$

Probemos que K_2 es s.e.v. de P_3:

$0 \in K_2$, pues $0 = 0t + 0t^3$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p_1(t) = c_1 t + d_1 t^3$; $p_2(t) = c_2 t + d_2 t^3$

$\boxed{PD: \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \in K_2}$

$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$$
$$= \alpha (c_1 t + d_1 t^3) + \beta (c_2 t + d_2 t^3)$$
$$= (\alpha c_1 + \beta c_2) t + (\alpha d_1 + \beta d_2) t^3$$

así $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \in K_2$.

(b) Es evidente que $K_1 + K_2 \subset P_3$.

Sea $r \in P_3 \Rightarrow r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Podemos escribir:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = \underbrace{(a_0 + a_2 t^2)}_{\in K_1} + \underbrace{(a_1 t + a_3 t^3)}_{\in K_2}$$

así $P_3 \subset K_1 + K_2$. Por tanto, $P_3 = K_1 + K_2$.

Probemos que $K_1 \cap K_2 = \{0\}$.

Es evidente que $\{0\} \subset K_1 \cap K_2$.

Ahora sea $r(t) \in K_1 \cap K_2$

$$\Rightarrow r(t) = a + bt^2, \quad r(t) = ct + dt^3$$

$$\Rightarrow r(t) = a + 0t + bt^2 + 0t^3, \quad r(t) = 0 + ct + 0t^2 + dt^3$$

$$\Rightarrow a + 0t + bt^2 + 0t^3 = 0 + ct + 0t^2 + dt^3$$

$$\Rightarrow a = 0, \; c = 0, \; b = 0, \; d = 0$$

Por tanto, $r(t) = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 \Rightarrow r(t) = \{0\}$.

Así, $K_1 \cap K_2 = \{0\}$.

Se concluye que $P_3 = K_1 \oplus K_2$.

2.- Sea el conjunto $V=\{x(1,0,2)+y(-1,4,0)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}$

Verifique que V es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Halle un subespacio W de $\mathbb{R}^3$, tal que $\mathbb{R}^3=V\oplus W$.

Solución: Es evidente que $(0,0,0)\in V$, pues

$$(0,0,0)=0(1,0,2)+0(-1,4,0).$$

Además sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $u\in V$ y $v\in V$. $\boxed{PD: \alpha u+\beta v\in V}$

Como $u\in V \Rightarrow u=x_1(1,0,2)+y_1(-1,4,0)$

$$v=x_2(1,0,2)+y_2(-1,4,0)$$

$$\Rightarrow \alpha u+\beta v$$
$$=\alpha\left[x_1(1,0,2)+y_1(-1,4,0)\right]+\beta\left[x_2(1,0,2)+y_2(-1,4,0)\right]$$
$$=\underbrace{(\alpha x_1+\beta x_2)}_{\in\mathbb{R}}(1,0,2)+\underbrace{(\alpha y_1+\beta y_2)}_{\in\mathbb{R}}(-1,4,0)\in V.$$

$\therefore$ V es s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Sea $W=\{x(1,1,1)/x\in\mathbb{R}\}=\{(x,x,x)/x\in\mathbb{R}\}$

$\therefore$ W es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3=V\oplus W$.

3.- Suponga que u,v,w son vectores L.I.

Demuestre que: $u+v$, $u-v$ y $u-2v+w$ son L.I.

Solución: Hipótesis: u,v,w son L.I. $\boxed{\text{PD: } u+v,\ u-v \text{ y } u-2v+w \text{ son L.I}}$

Sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha(u+v)+\beta(u-v)+\gamma(u-2v+w)=0$$
$$\Rightarrow \alpha u+\boxed{\alpha v}+\beta u\boxed{-\beta v}+\gamma u\boxed{-2\gamma v}+\gamma w=0.$$
$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)u+(\alpha-\beta-2\gamma)v+\gamma w=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=0 \quad (1)\\ \alpha-\beta-2\gamma=0 \quad (2)\\ \gamma=0 \quad (3)\end{array}\right\} \text{Pues } u,v,w \text{ son L.I} \Longrightarrow \alpha=0,\beta=0,\gamma=0$$

$\therefore$ $u+v$, $u-v$ y $u-2v+w$ son L.I.

4: Demuestre que, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de un e.v. V y $c \neq 0$, entonces $\{cv_1, \ldots, v_n\}$ es tambien una base de V.

Solución: Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, entonces $\dim V = n$.

Basta demostrar que $\{cv_1, \ldots, v_n\}$ es L.I.:

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ tales que:

$$\alpha_1 (c v_1) + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow (c\alpha_1) v_1 + (\alpha_2)(v_2) + \cdots + (\alpha_n) v_n = 0$$

$$\Rightarrow c\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0$$ (pues $v_1, \ldots, v_n$ son L.I.)

$\therefore \{cv_1, \ldots, v_n\}$ es L.I.

y es base de V.