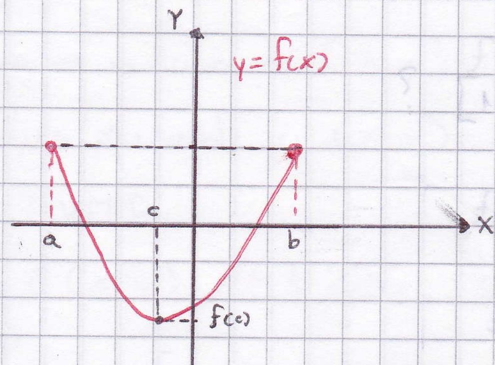
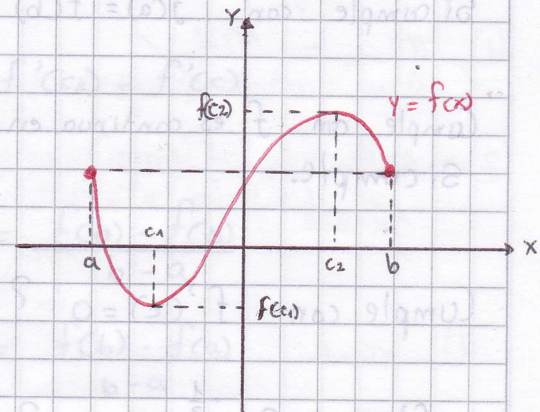
TEOREMA DE ROLLE:

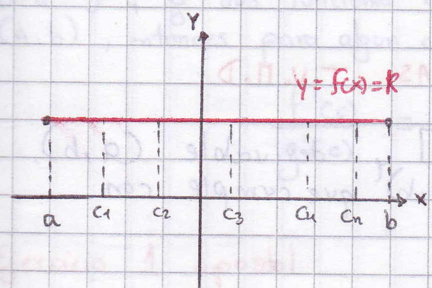
Sea f una funcion continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), supongamos que $f(a)=f(b)$ entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ talque $f'(c)=0$



$f'(c)=0, \ \forall c \in (a,b)$



$f'(c_1)=0$
$f'(c_2)=0$



$f'(c_1)=0$
$f'(c_2)=0$
$f'(c_3)=0$
$f'(c_4)=0$
$f'(c_n)=0$

Ejercicio 4. apostol

Sea $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1)=f(-1)=0$, pero $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1,1]$. Explicar porque contradice aparentemente el teorema de Rolle.

Cumple con $f(a)=f(b)$?

$f(1) = 1 - (1)^{\frac{2}{3}} = 0$

$f(-1) = 1 - (-1)^{\frac{2}{3}} = 0$

Si cumple con $f(a) = f(b)$ es decir $f(1) = f(-1)$

Cumple con f es continua en $[-1, 1]$?

Si cumple.

Cumple con $f'(c) = 0$?

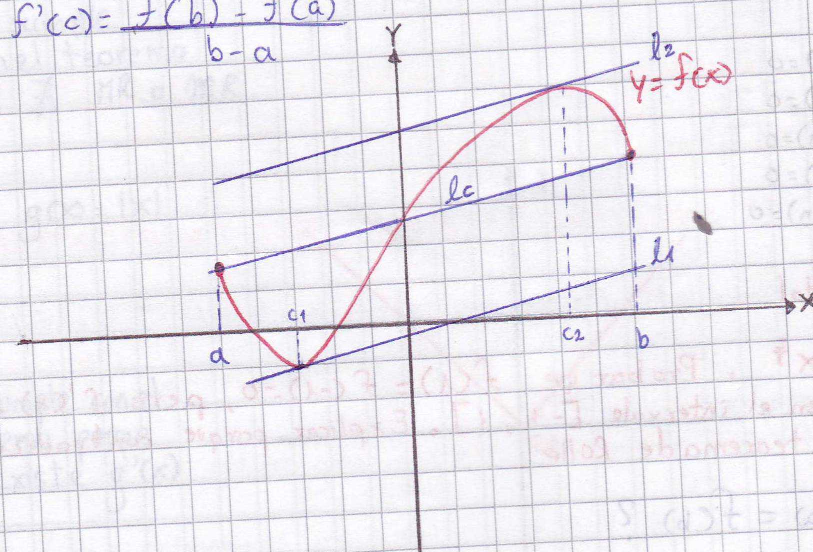
$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Longrightarrow \nexists f'(0)$$

No cumple con $f'(0) = 0$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS T.V.M.D

Sea f una funcion continua en $[a,b]$ y derivable (a,b), entonces existe por lo menos un $c \in (a,b)$ que cumple con

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



$$m_{l_c} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow m_{l_c} = m_{l_1} = m_{l_2}$$

$$m_{l_1} = f'(c_1)$$

$$m_{l_2} = f'(c_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c_2) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

T.V.M.D de Cauchy

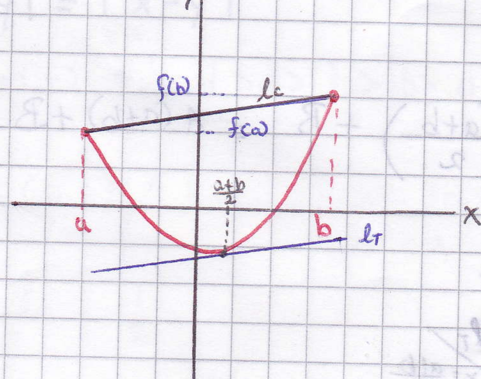
Sea f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y también derivables en (a,b), entonces para algun $c \in (a,b)$ tenemos que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Ejercicio 1 apostol

Probar que en la parabola $y = Ax^2+Bx+C$, la cuerda que une los ~~dos~~ puntos para los cuales $x=a$ y $x=b$ es paralela ala tangente en el punto para el cual $x = (a+b)/2$.

$f(x) = Ax^2+Bx+C$



f es continua en $[a,b]$ si porque es polinomio.

f es derivable en (a,b)

① $m_{eda} \stackrel{?}{=} m_{l_T}\Big/_{x=\frac{a+b}{2}}$

② $m_{l_T}\Big/_{x=\frac{a+b}{2}} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

① $m_{eda} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$= \frac{(Ab^2+Bb+C)-(Aa^2+Ba+C)}{b-a}$$

$$= \frac{A(b^2-a^2)+B(b-a)}{b-a}$$

$$= \frac{A(b-a)(b+a)+B(b-a)}{b-a}$$

$$= A(b+a)+B$$

②

$m_{l_T} = f'(x)$

$= 2AX+B$

$$m_{l_T}\Big/_{x=\frac{a+b}{2}} = 2A\left(\frac{a+b}{2}\right)+B = A(a+b)+B$$

$\Downarrow$

$$m_{ed} = m_{l_T}\Big/_{x=\frac{a+b}{2}}$$

Utilizar el T.V.M.D. para deducir la siguiente desigualdad
$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$

(1*) $f(t) = \operatorname{sen} t$ en $[x, y]$

Seno es continua en $[x, y]$ (porque seno es continua en $\mathbb{R}$)

Seno es derivable en (x, y) (porque seno es derivable en todos los puntos)

Por T.V.M.D.

$$\exists c \in (x,y) \; / \; f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

de (1*)

$$f'(t) = \cos t \Rightarrow f'(c) = \cos c \Rightarrow \cos c = \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x}$$

como: $|\cos c| \leq 1$ por que el coseno solo puede tomar valores entre $[-1, 1]$

$$|\cos c| = \left| \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} \right|$$

$$\Downarrow$$

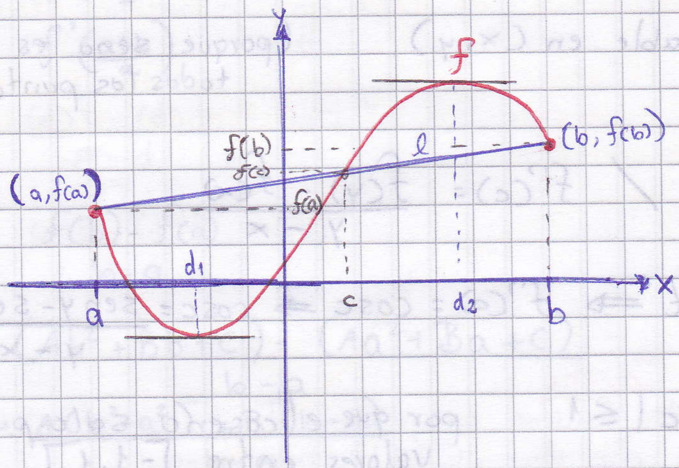
$$\left| \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} \right| \leq 1$$

$|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| \leq |y - x|$ como $|y-x| = |x-y|$

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$

9. Sea f continua en $[a,b]$, tiene derivada segunda en (a,b). El segmento de recta que une $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ corta la grafica f en un tercer punto $(c, f(c))$ siendo $a<c<b$ demostrar que

$f''(t)=0$ por lo menos para un t que pertenece a (a,b)



por T. Ex. F. C

$\exists d_1, d_2 \in (a,b) \ / \ f'(d_1)=0$ y $f'(d_2)=0$

f' es continua en $[d_1, d_2]$

f' es derivable en (d_1, d_2) y $f'(d_1)=f'(d_2)$ entonces

por el T. Rolle entonces $\exists t \in (d_1, d_2)$ y $t \in (a,b) \ / \ f''(t)=0$

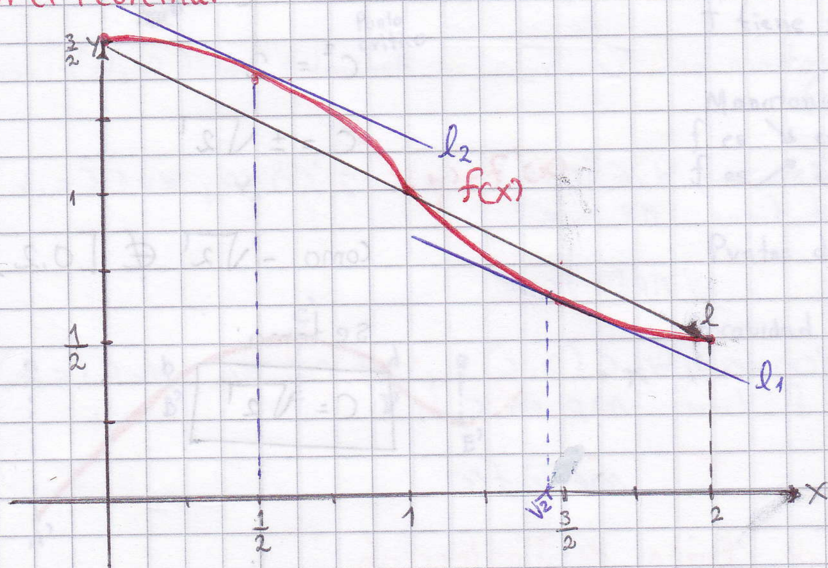
$a<d_1<t<d_2<b \ / \ f''(t)=0$

3. Se define la funcion f como sigue

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x\leq 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

a) Dibujar la grafica de $f(x)$ para x en el intervalo $0\leq x\leq 2$.

b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.



f es continua en $[0,2]$

f es derivable en $(0,2)$

$$f'(x)=\begin{cases}-x & ; x\leq 1\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2} & ; x\geq 1\end{cases}$$

Entonces $\exists c\in(0,2) \,/\, f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(c)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

$$f'(c) = \begin{cases} -c & ; c \leq 1 \\ -\frac{1}{c^2} & ; c \geq 1 \end{cases}$$

$f'(x) = -x \; ; (0,1)$ $\wedge$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \; ; (1,2)$

$f'(c) = -c$

$-\frac{1}{2} = -c$

$\boxed{c = \frac{1}{2}}$

$f'(c) = -\frac{1}{c^2}$

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{c^2}$

$c^2 = 2$

$c = \pm\sqrt{2}$

como $-\sqrt{2} \notin [0,2]$

se toma:

$\boxed{c = \sqrt{2}}$